

## TECNOLOGIAS PARA DESENVOLVER O PENSAMENTO ALGÉBRICO

**José António de Oliveira Duarte**

*Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal*  
*jose.duarte@ese.ips.pt*

### **Resumo**

Este trabalho visa compreender o conhecimento profissional que assiste o professor de Matemática, no desenvolvimento curricular e na prática lectiva, para desenvolver o pensamento algébrico, com recurso à tecnologia.

O desenvolvimento do pensamento algébrico constitui tema actual da investigação, com expressão nas orientações curriculares, entendido como um processo de generalização de ideias particulares, que inclui expressar relações através de diferentes formas de representação. Conceitos algébricos, como variável e função, podem beneficiar das características dinâmicas e interactivas da tecnologia e, em particular, a folha de cálculo pode facilitar a articulação entre as representações em tabela numérica e gráfica e apoiar o processo de generalização e de modelação.

Os novos papéis exigidos ao professor como profissional autónomo no domínio do desenvolvimento curricular e da prática, sugerem o seu envolvimento em processos de desenvolvimento profissional em que a sua prática possa ser considerada simultaneamente um ponto de partida, gerador de conhecimento profissional, através da análise e reflexão, mas também um lugar de aplicação desse conhecimento.

A metodologia utilizada é de natureza interpretativa, de tipo qualitativo e na modalidade de estudo de caso. Para a recolha de dados, foi criado um contexto de trabalho colaborativo integrando o investigador e duas professoras de Matemática a leccionar o 7.º ano, que, ao longo de um ano, elaboraram tarefas sobre pensamento algébrico com utilização das TIC e reflectiram sobre a prática observada.

Os principais resultados, focados no papel e utilização da tecnologia para desenvolver o pensamento algébrico, mostram a importância das tecnologias dinâmicas e interativas, como algumas *applets* e a folha de cálculo, que disponibilizem múltiplas representações e facilitem os processos de experimentação, generalização e de modelação. As duas professoras fazem delas, no entanto, um uso diverso, servindo-se de computadores portáteis e/ou quadros interativos, mas integrando-as de acordo com as metodologias de ensino com que mais se identificam.

Palavras-chave: tecnologias; pensamento algébrico; conhecimento profissional.

### **Abstract**

This study aims to understand the professional knowledge that assist mathematics teachers in their curriculum development and teaching practice devoted to develop algebraic thinking with technology.

The development of algebraic thinking is a topic of current research, with expression in the curriculum guidelines. It is understood as a process of generalization of particular ideas, which

includes the expression of relationships through different representations. Algebraic concepts, such as variable and function, may benefit from the dynamic and interactive features of technology. The spreadsheet, in particular, can facilitate the articulation between numerical tables and graphs and also can support the process of generalization and modeling.

The new roles required for teachers to act as autonomous professionals in the curriculum development and practice, suggest their involvement in a development processes in which the professional practice may be regarded as both a starting point, generating professional knowledge through analysis and reflection, and also a place for application of this knowledge.

The methodology adopted is interpretative, qualitative and follows the case study design. A context of collaborative work between the researcher and two math teachers teaching 7th grade classes was created and took place over a year, focused on the development of algebraic thinking tasks with ICT and reflection on the observed practice of the two teachers.

The main results of the study revealed the importance of dynamic and interactive technologies, such as the spreadsheet and some *applets* that provide multiple representations and facilitate the processes of experimentation, modeling and generalization. The two teachers, however, used the technology differently in their practice; they used laptops and/or interactive whiteboards, but integrated them in accordance with the teaching methodologies that characterize the practice of each one.

Keywords: technologies; algebraic thinking; professional knowledge.

## INTRODUÇÃO

Os estudos sobre o professor têm vindo a merecer maior atenção, que decorre do reconhecimento do seu crescente protagonismo no desenvolvimento e na gestão do currículo e no seu próprio desenvolvimento profissional. Os contextos que juntam investigador e professores num trabalho colaborativo e que integram actividades em torno de grandes ideias matemáticas e processos de reflexão sobre as práticas podem constituir oportunidades para expressarem o seu conhecimento profissional para ensinar, através das opções que tomam no planeamento e das ações que desenvolvem quando conduzem o ensino na sala de aula.

O desenvolvimento do pensamento algébrico merece hoje uma maior atenção da investigação e das orientações curriculares internacionais, e encontra-se expresso no novo programa de Matemática do ensino básico. Também os desenvolvimentos recentes da tecnologia, ao nível das suas características dinâmicas e interactivas, a par das múltiplas representações que disponibiliza, têm vindo a mudar as perspectivas sobre a aprendizagem de alguns conceitos algébricos.

Tendo em conta estas perspetivas, este estudo situa-se num contexto de desenvolvimento profissional, em que uma equipa constituída pelo investigador e por duas professoras de Matemática a lecionarem 7.º ano, trabalham em tarefas para desenvolver o pensamento algébrico, num ambiente que recorre às tecnologias, em particular, as *applets* e a folha de cálculo. O seu objetivo é compreender o conhecimento profissional que assiste o professor no desenvolvimento curricular e na prática lectiva, num contexto de trabalho colaborativo, tendo como foco o uso da tecnologia no desenvolvimento do pensamento algébrico.

Em particular, procuro perceber e caracterizar os aspectos em que evolui o conhecimento profissional das professoras relativamente às opções que tomam quando elaboram as tarefas e às ações que promovem na sala de aula para desenvolver o pensamento algébrico, com recurso à tecnologia. Uma outra questão que orienta o estudo, e que discuto brevemente nesta comunicação, é procurar compreender as características do contexto da equipa de trabalho colaborativo que são relevantes para a evolução deste conhecimento profissional para ensinar.

### **1. ENQUADRAMENTO TEÓRICO**

Em Portugal, como noutros países, as orientações curriculares oficiais têm vindo a colocar a ênfase no desenvolvimento do pensamento algébrico desde os primeiros anos de escolaridade, para além de que os professores devem promover o uso adequado da tecnologia (NCTM, 2007; ME, 2007). Os termos tecnologias ou tecnologias de informação e comunicação (TIC) são aqui usados, na linha do entendimento de Matos (2008), para designar uma grande variedade de ferramentas computacionais, onde se incluem os computadores e os quadros interativos, mas também as folhas de cálculo, as *applets* e as plataformas de gestão de aprendizagem.

O desenvolvimento do pensamento algébrico requer uma combinação cuidadosa e adequada das tarefas que promovam a generalização e a progressiva formalização. Este trabalho deve apoiar-se no uso de múltiplas representações tais como símbolos, linguagem natural, tabelas numéricas, gráficos e outras representações informais usadas pelos alunos (Blanton & Kaput, 2005). No entanto, mais importante do que usar uma única representação, que destaca um aspeto específico, é a capacidade de

traduzir uma representação na outra, trazendo mais significado ao trabalho algébrico (Friedlander & Tabach, 2001).

Os padrões e regularidades constituem um ponto de entrada para o pensamento algébrico e podem ser incluídos no tema mais geral de relações e funções (NCTM; 2007), colocando a ênfase no caráter algébrico dos tópicos da matemática elementar (Carraher & Schliemann, 2007), ‘espalhados’ no currículo desde os primeiros anos de escolaridade.

Nos últimos anos, os desenvolvimentos das tecnologias vieram valorizar as abordagens funcionais à Álgebra que facilitam a exploração dos sistemas simbólicos, permitindo interligar contextos tabulares, geométricos e gráficos (Ferrara, Pratt & Robutti, 2006). A investigação no desenvolvimento do pensamento algébrico mostra a importância das investigações numéricas que vão além dos cálculos, focando-se nas relações, regularidades, padrões e procurando a generalização (Carraher, Schliemann & Schwartz, 2008).

De acordo com Chazan e Yerushalmy (2003), abordagens à Álgebra baseadas nas funções, começam por colocar a ênfase na noção de variável e nas expressões para representar funções. As abordagens introdutórias à álgebra escolar, apoiadas na tecnologia, destacam o uso das múltiplas representações das funções, trazendo um novo papel para este tema no currículo de Álgebra. Isto é assumido como importante a par do uso das novas características das tecnologias dinâmicas e interativas que permitem, por exemplo, manipular objetos e observar os resultados, prestando atenção à construção de significado (Ferrara, Pratt & Robutti, 2006).

A aprendizagem dos alunos pode ser promovida através do uso de ferramentas tecnológicas que ajudem a reestruturar o pensamento dos alunos, facilitando uma aprendizagem significativa num processo simultaneamente de reflexão individual e de colaboração com outros. As folhas de cálculo são um exemplo de ferramentas cognitivas para visualização, simulação e modelação (Jonassen, 2007), com o potencial de gerarem valores recursivamente, e que permitem uma abordagem não convencional das notações algébricas. No ensino da Álgebra, podem apoiar “a

observação acerca das relações entre quantidades, procuram evitar ou reduzir o esforço cognitivo com aspetos do trabalho simbólico algébrico e valorizam a aprendizagem, a partir de exemplos, apoiada em múltiplas representações articuladas entre si” (Duarte, 2011, p. 156). As tabelas numéricas podem constituir um bom ponto de partida, na medida em que os alunos podem experimentar “uma experiência com variáveis como números que vão mudando e com os valores das expressões mudando como resultado” (Brown & Mehilos, 2010, p. 536). E as relações que se podem estabelecer entre a representação numérica e gráfica, numa folha de cálculo, podem ajudar os alunos “a dar sentido aos modelos algébricos dos fenómenos físicos” (Ferrara *et al.*, 2006, p. 252).

As *applets*, incluindo as *applets* algébricas, são aplicações dinâmicas e interativas, focadas em tópicos particulares, que podem servir para mostrar, visualizar, explorar e ensinar diferentes conceitos, apoiadas em sub-modelos emergentes que ligam a simbolização com o significado e dão constante *feedback* (Heck, Boon, Bokhove & Koolstra, 2007; Gravemeijer, Doorman & Drijvers, 2010). Também Suh (2010) reconhece que estas aplicações e a folha de cálculo são particularmente apropriadas no desenvolvimento de modelos visuais e oferecem oportunidades para construir compreensão conceptual dos processos matemáticos no ensino da Álgebra.

Mas a investigação conduzida em contextos de uso da tecnologia, destaca a importância da qualidade das tarefas e das discussões na sala de aula, em que o professor procura que os conceitos venham ao de cima, numa atividade que mantém, em paralelo, o trabalho com as técnicas algébricas de papel e lápis (Kieran, 2007a), e procura, simultaneamente, equilibrar os aspectos conceptuais e procedimentais (Duarte, 2011).

Este conhecimento necessário para ensinar, num ambiente que inclui a tecnologia, exige desafiar as experiências de desenvolvimento profissional convencionais, considerando-as como actividades situadas que ocorrem privilegiadamente em comunidades que colaboram entre si, em experiências intensas desenvolvidas ao longo do tempo e que partilham e reflectem sobre as suas práticas (GEPE, 2009; Mishra & Koehler, 2006). Com o objetivo de promover ambientes que apoiem o

desenvolvimento de interações entre diferentes comunidades (investigadores e professores) adequados para alcançar novas exigências curriculares e integrando novas ferramentas pedagógicas e conhecimento de conteúdo, vários autores sugerem o papel dos contextos colaborativos onde trabalham com tarefas focadas em tópicos particulares (como o pensamento algébrico) ou em novas abordagens (como a integração das tecnologias), promovendo a reflexão e o assumir de riscos (Boavida & Ponte, 2002; Ruthven & Goodchild, 2008).

## **2. OPÇÕES METODOLÓGICAS**

Esta comunicação discute como os professores planificam e conduzem as aulas com o objetivo de desenvolver o pensamento algébrico, usando as TIC. A metodologia é interpretativa e qualitativa, dado o foco no significado das opções e ações das professoras participantes (Erickson, 1986; Merriam, 1988; Stake, 2007). Consistentemente com uma abordagem interpretativa da investigação, desenvolvo um contexto colaborativo juntando investigador e professores (Erikson, 1986) no qual a sua prática pode ser simultaneamente um ponto de partida para reflexão e um ponto de chegada para aplicação (Llinares & Krainer, 2006; Mewborn, 2003).

A comunicação relata dois estudos de caso desenvolvidos neste contexto colaborativo (Olson, 1997) envolvendo o investigador e duas professoras de Matemática a lecionarem 7.º ano (Ana, com 55 anos e 29 de serviço; e Beatriz, com 32 anos e 9 de serviço). As fontes de dados são as observações das aulas das professoras e as sessões de trabalho colaborativo, entrevistas, interações numa plataforma de gestão de aprendizagem e outros documentos escritos, como fichas de trabalho e relatos de aulas das professoras.

As sessões de trabalho colaborativo mensais focam-se em três ideias centrais: elaboração de tarefas para a sala de aula, sobre pensamento algébrico com TIC, planificação do trabalho a desenvolver em sala de aula com os alunos e reflexão sobre episódios da prática videogravados, focados no papel do professor para orquestrar a participação dos alunos (Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008), em aulas em que recorrem à tecnologia dos quadros interativos e/ou dos computadores portáteis. Entre duas sessões consecutivas, a equipa colaborativa desenvolve atividades síncronas

(chat) e assíncronas (fóruns) na plataforma de gestão de aprendizagem para discutir aspetos específicos das tarefas e do uso das tecnologias.

Dado o objetivo da investigação, a análise de dados procura identificar as intenções e opções implícitas e explícitas das professoras, interpretando as marcas que fazem sentido na sua fala, nos seus diferentes contextos de produção (entrevistas individuais, sessões coletivas de trabalho e prática da sala de aula). Assim a análise de dados segue um processo de análise de discurso (Fiorentini & Lorenzato, 2006), com categorias decorrentes simultaneamente das questões de investigação e emergindo indutivamente a partir dos dados empíricos.

### **3. CONTEXTOS RELEVANTES DE RECOLHA E ANÁLISE DE DADOS**

Nesta comunicação opto por destacar duas atividades de relevo que marcaram o trabalho da equipa colaborativa: (i) a discussão e elaboração de uma tarefa exploratória sobre sequências lineares, com recurso a uma *applet* (<http://www.waldomaths.com/Linseq1NLW.jsp>), a sua exploração em sala de aula e a reflexão realizada *a posteriori*; (ii) a utilização da folha de cálculo na modelação e exploração da tarefa das carteiras, adaptada de um texto de investigação, que envolve os conceitos de variável e função, o significado associado às diferentes representações utilizadas e a sua relação com o contexto do problema.

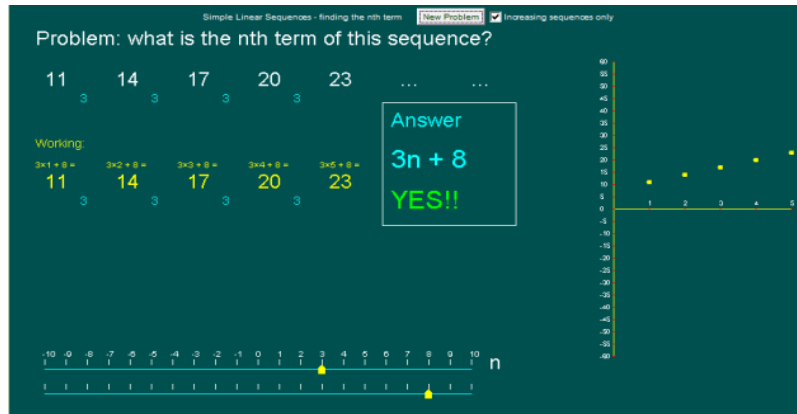
#### **3.1 Sequências lineares e descobertas com a tecnologia**

Tendo como objetivo compreender o papel dos parâmetros  $a$  e  $b$  no 'andamento' de uma sequência linear do tipo  $a*n+b$ , a equipa começa por explorar a referida *applet*, identificar as suas potencialidades e, em seguida, elabora um conjunto de questões a colocar aos alunos que integra naquilo que se vem a designar pela *Tarefa das sequências lineares*.

Após alguns momentos iniciais de exploração, mais ou menos livre, de manipulação dos seletores, na parte inferior da janela (Figura 1), solicita-se a observação e registo das suas implicações na construção da sequência numérica, no gráfico e na expressão simbólica. Os alunos são convidados a responder a algumas questões: saber um termo, conhecida a ordem, identificar a possibilidade de existir um dado termo na sequência e

comparar as sequências geradas com os múltiplos de um dado número, identificando semelhanças e diferenças.

Figura 34: janela principal da *applet*



Ana, no relato da aula que escreve por sua iniciativa, revela que se surpreendeu com a forma como os alunos intuitivamente trabalham com conceitos que ainda desconhecem (inclinação e declive), com a resolução informal de equações, utilizando as operações inversas, por ordem inversa, apoiados na *applet* e com as explicações elaboradas que dão para a descoberta da expressão geral das sequências. Nos processos de comunicação dos alunos destacam-se a análise das representações numéricas (a sequência gerada e as diferenças anotadas entre os termos) e a procura de relação com a representação gráfica:

A turma onde nós temos realizado as observações (...) olharam sempre para o gráfico (...) e rapidamente foram capazes de ir mexendo e ver que ficava paralelo e acertar depois com o outro (...) Tão engraçado, o João explicou assim (...) Eu olho aqui ao valor que está entre estes dois [diferença registada entre os dois termos consecutivos] que é 9 e ponho no comando do n, 9n... e assim que ponho aqui [no gráfico] fica logo paralelo... Depois, vou fazer a diferença entre este e este [os dois primeiros termos das 2 sequências] e a diferença entre este número e aquele que está ali dá-me o número de baixo e trás! Ficou logo lá em cima! E eu que nunca tinha pensado nisso... (Ana)

Beatriz, preocupada com o rigor e a sequência curricular, apercebe-se da necessidade de estabelecer 'pontes' entre a informação disponibilizada através das representações da tecnologia e os conteúdos curriculares, de modo a facilitar a compreensão dos conceitos e considera que as expressões numéricas que vão sendo geradas por ação



dos seletores, como, por exemplo,  $8*4+2$ ;  $8*5+2$ ; ..., em  $8*n+2$ , devem ser utilizadas pelo professor para “relacionar com as expressões com variáveis também” (Beatriz). A professora reconhece que a articulação entre as representações numérica e gráfica pode proporcionar aos alunos uma aprendizagem com compreensão, e antecipa as conjecturas dos seus alunos quando tentam sobrepor, por manipulação dos dois seletores, a sequência gerada pelo utilizador e a gerada aleatoriamente pelo computador:

Eles aqui têm perfeitamente a noção do que é isto [o andamento numérico das sequências] e depois é só passarem aqui para a análise gráfica, não é?! (...) Primeiro temos que partir daqui... da relação entre os números de uma sequência e de outra sequência para eles perceberem isso (...) Depois (...) é eles perceberem também a diferença aqui no gráfico e depois pensarem... Então se falta aqui... como é que passamos desta para aquela? (Beatriz)

### 3.2 A tarefa das carteiras: o significado e as múltiplas representações

A equipa discute e elabora a *Tarefa das Carteiras*, inspirada num texto de investigação, que é posteriormente explorada pelas duas professoras na sala de aula e discutida e refletida numa sessão da equipa, a partir de episódios selecionados dos registos vídeo. O objetivo é modelar uma situação do quotidiano, com o apoio da folha de cálculo, procurando a generalização progressiva sob formas cada vez mais formais, partindo da linguagem natural e da representação sob a forma de tabela numérica.

Esta tarefa (Figura 2), traduzida por Beatriz numa ficha de trabalho entregue aos


Figura 35: A tarefa (aberta) das carteiras

Problema das carteiras

**O Miguel tem 8 € na sua mão e o resto do seu dinheiro na carteira.**

**O Rodrigo tem exactamente 3 vezes mais dinheiro do que o Miguel tem na sua carteira.**

**O que se pode dizer da quantidade de dinheiro que o Miguel e o Rodrigo têm?**



alunos, explicita um conjunto de questões que pretendem tornar mais claro o papel da letra como variável e das relações envolvidas como funções. Pretende-se que a observação e análise dos padrões numéricos da tabela inicialmente criada, em conjunto com a representação gráfica, conduzam aos modelos algébricos representativos das funções que traduzem o total do dinheiro dos dois amigos,

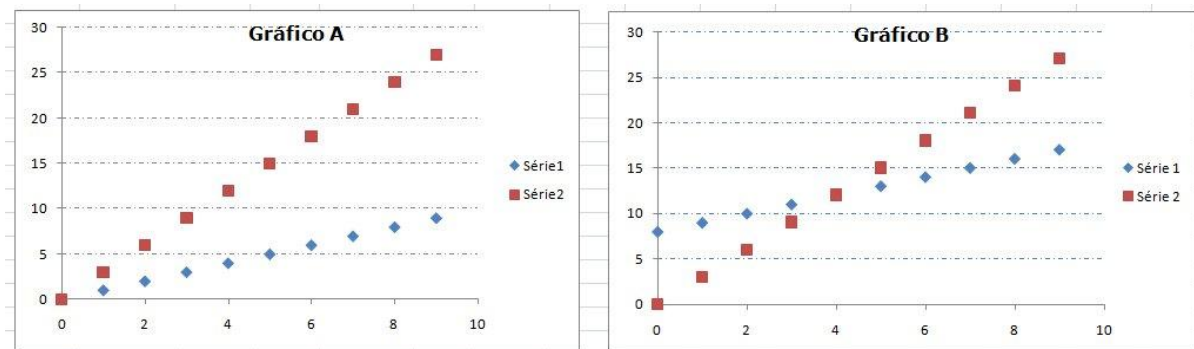
procurando manter, na discussão com os alunos, uma forte relação com o contexto do problema.

Beatriz, que se preocupa em seguir rigorosamente o currículo prescrito, confronta-se com a utilização pelos alunos daquilo que considera ser uma nova abordagem dos conceitos: os alunos trabalham com letras no papel de variáveis que ainda não conhecem formalmente, o que se trata de uma aprendizagem do conceito através do seu ‘uso’ informal num contexto:

Aqui a noção de variável está implícita! É claramente (...) Sabes que eu também ando a pensar nisto (...) Eles apanharam muito facilmente (...) E até com as expressões e tudo ... [E quando quiseram explicar] eles explicaram aquilo tão bem ... que engraçado. Quer dizer que isto vai lá ficando ... (Beatriz)

Ana, que usa esta tarefa mais tarde, dado o seu desfasamento temporal relativamente às planificações de Beatriz, beneficia da reflexão realizada na equipa e introduz algumas alterações. Numa das questões que coloca (Figura 3) pode ler-se: *Qual dos dois gráficos abaixo representa a situação descrita? Justifica a tua opção.*

Figura 36: Gráficos que integram a ficha apresentada por Ana



Da exploração desta questão em sala de aula, Ana reconhece que queria ver “se alguém caía (...) [mas] nenhum referiu o A (...) Eles agora olham para os gráficos e já sabem o que quer dizer” (Ana).

O trabalho desenvolvido com esta tarefa na folha de cálculo foi mais uma contribuição para Beatriz e Ana ultrapassarem algumas reservas iniciais ao uso desta ferramenta, pelas dificuldades e tempo ‘perdido’ com a sintaxe:

Mais uma vez se vê que não é preciso dominarmos a folha de cálculo (...) para que na verdade se possa ver estes ‘aumentos’ dos alunos e este provocar da discussão, porque na verdade a potencialidade que a folha de cálculo nos traz de pensar na fórmula, pensar na generalização, de ir lá e mudar (...) e essa utilização de diversas representações é fantástica (...) Eram essas conexões com a inclinação das rectas em movimento, a expressão com as variáveis... (Ana)

Inicialmente, quando usa a representação gráfica e numérica da folha de cálculo, em simultâneo, e traduz uma na outra, Ana considera ser um desafio que sente que vai para além do que o programa pede (Duarte, 2011). A professora refere que até se podia falar na inclinação “e esse facto faz com que as duas rectas se possam encontrar (...) E procurar na tabela a razão desse facto (...) [e esse ponto de intersecção das rectas representativas do dinheiro de cada um dos amigos], é um passo para os sistemas de equações... do 9.º ano” (Ana).

#### **4. RESULTADOS**

No início do trabalho colaborativo, ambas as professoras identificam o pensamento algébrico com o cálculo algébrico e com a generalização local das regularidades. Com a discussão de episódios de investigação e a elaboração de tarefas, esta perspetiva evolui para um processo de pensamento baseado em relações que requerem pensamento funcional, apoiado em múltiplas representações, onde se incluem as representações dos alunos e outras representações que emergem do uso da tecnologia.

Um dos maiores desafios que Ana e Beatriz enfrentam é a monitorização das tarefas, mobilizando o trabalho dos alunos, em pequeno grupo, nas discussões coletivas, o que se integra de modo natural nos processos de trabalho de Ana, mas cria algumas dificuldades a Beatriz: “Eu tenho de dar tempo aos alunos (...) e este ano eu comecei a fazer isso” (Beatriz). Este trabalho de observação do que se faz e discute nos pequenos grupos, quando trabalham com os computadores portáteis, permitem a Ana acompanhar as aprendizagens individuais e as discussões: “O facto de eles estarem a trabalhar mais autonomamente, dá para ver montes de coisas” (Ana).

Os principais resultados dos dois estudos de caso mostram diferentes usos que as professoras fazem da tecnologia (para ilustrar ou aplicar conceitos, verificar relações e resultados ou modelar e explorar relações), mas coerentes com as metodologias de

ensino com que mais se identificam e a tecnologia integra-se naturalmente no estilo próprio que cada professora adota quando ensina. Ana promove o trabalho de grupo e as discussões com os alunos, usando computadores portáteis (4 ou 5 numa sala de aula), privilegiadamente para exploração e descoberta. Ela considera que o que é importante “é a tarefa e o desafio que promove a reflexão e o pensamento concetual” (Ana) e acredita que a organização em pequeno grupo ‘torna a turma mais pequena’ e, quando os alunos têm autonomia, o professor está “mais livre para observar a discussão, explicações e argumentações” (Ana) que naturalmente emergem do trabalho de grupo. Beatriz usa a tecnologia privilegiadamente para mostrar e visualizar conceitos servindo-se de *software* dinâmico, com o quadro interativo apoiando a sua forma de comunicação privilegiada com todo o grupo turma. Ela salienta que “todos os alunos estão centrados no mesmo exemplo e isso facilita a sistematização” (Beatriz) dos conceitos. No entanto, a experiência de trabalho que desenvolve em equipa é determinante para Beatriz usar os computadores portáteis em pequeno grupo, reconhecendo progressivamente as suas potencialidades para desenvolver a autonomia dos alunos e a confiança e à-vontade cada vez maior para discutirem e explicarem descobertas, quando têm tempo para contactar e explorar a tecnologia.

Ana e Beatriz têm uma resistência inicial a usar a folha de cálculo pelas dificuldades da sintaxe colocadas aos alunos, pelo tempo que lhes requer num momento em que ainda se estão a apropriar das ideias chave do pensamento algébrico e pela necessidade de colocar as questões apropriadas para desenvolver o pensamento funcional, uma vez que a ferramenta convida ao uso da recursividade e da generalização local. Mas gradualmente, elas surpreendem-se com as explicações dos seus alunos a apropriarem-se do valor da folha de cálculo para generalizar, através da análise das tabelas numéricas e das suas implicações ao nível dos gráficos, clarificando o conceito de variável e de relação funcional.

Ambas as professoras reconhecem que o uso de múltiplas representações promove uma melhor compreensão das expressões algébricas e das funções. Através do uso de tabelas e gráficos e da sua tradução de uma representação noutra e em linguagem natural, os alunos mostram caminhos criativos de pensar que ultrapassam as

expectativas das professoras: “Quando vocês olham para estas expressões [aponta para as expressões algébricas], elas ‘falam convosco’ (...) elas dizem-vos alguma coisa” (Ana). Esta frase significa que os alunos já tinham trabalhado antes com outras representações, tais como tabelas numéricas e a sua tradução em linguagem natural e que as letras trazem esse significado multi-representacional e contextual com elas. Dispor de representações da tecnologia, a par das representações dos próprios alunos, constituem alternativas que conferem aos alunos “a alegria de poder contribuir” (Ana), quando ainda não dispõem de formas mais estruturadas e formais de o fazer.

Finalmente, os dados mostram o importante papel do contexto colaborativo, permitindo ao professor clarificar, através da análise da prática, o seu conhecimento matemático para ensinar com tecnologia e desenvolver um trabalho mais exigente com sequências, pensamento funcional e múltiplas representações, com implicações na prática de sala de aula:

Eu realmente gostei muito de trabalhar neste projeto convosco, e aprendi muitas coisas e permitiu-me ver as minhas aulas e pensar acerca das minhas práticas (...) [Com a tecnologia] é preciso articular muita coisa, muita coisa ... Se nós numa aula, levamos aquele conceito, aqueles conceitos para dar ou aqueles conteúdos para dar, muitas vezes com a tecnologia não são aqueles exatamente, até podemos ir buscar outros que se calhar eram lá do fim do ano. Mas podem-se relacionar. E é preciso fazer exatamente esta articulação. (Beatriz)

Outra importante conclusão é a de que o contexto colaborativo, de elaboração das tarefas e posterior reflexão sobre a prática, constitui um processo dialético de discussão e ação informado pela teoria curricular e pela investigação, que dá mais confiança às professoras e permite-lhes arriscar mais, quando alteram o planeamento curricular ou seguem outro caminho induzido pela utilização da tecnologia que faz surgir assuntos ainda não lecionados ou para além do programa.

## REFERÊNCIAS

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Helping elementary teachers build mathematical generality into curriculum and instruction. *ZDM*, 37(1), 1-9.

- Boavida, A. M., & Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI (Ed.), *Refletir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 43-55). Lisboa: APM.
- Brown, S. A., & Mehilos, M. (2010). Using tables to bridge Arithmetic and Algebra. *Mathematics teaching in the middle school*, 15(9), 532-538.
- Carraher D., Schliemann, A., & Schwartz, J. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. In J. Kaput., D. Carraher & M. Blanton (Eds), *Algebra in the early grades* (pp. 235-272). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Carraher, D., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Charlotte, NC: Information Age.
- Duarte, J. (2011). Tecnologias e pensamento algébrico: um estudo sobre o conhecimento profissional dos professores de Matemática (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: IEUL.
- Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M.C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York: MacMillan.
- Ferrara, F., Pratt, D., & Robutti O. (2006). The role and uses of Technologies for the teaching of algebra and calculus. In A. Gutiérrez & P. Boero (Orgs), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 237-273). Rotterdam: Sense.
- Fiorentini, D., & Lorenzato, S. (2006). *Investigação em educação matemática: Percursos teóricos e metodológicos*. Campinas: Autores Associados.

- Friedlander, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. In A. A. Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173-185). Reston, VA: NCTM.
- Gabinete de Estatística e Planeamento da Educação (2009). *Competências TIC. Estudo de implementação* (Volume 2). Lisboa: Plano Tecnológico da Educação – GEPE/ME. Recuperado em 12 de Junho de 2011, de [http://www.pte.gov.pt/idc/idcplg?IdcService=GET\\_FILE&dID=14214&dDocName=002564](http://www.pte.gov.pt/idc/idcplg?IdcService=GET_FILE&dID=14214&dDocName=002564).
- Gravemaijer, K., Doorman, M., & Drijvers, P. (2010). Symbolizing and the development of meaning in computer-supported algebra education. In L. Verschaffel, E. de Corte, T. Jong & J. Elen (Eds.), *Use of representations in reasoning and problem solving: Analysis and improvement*. New York, NY: Routledge.
- Llinares, S., & Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 429-459). Rotterdam: Sense.
- Matos, J. F. (2008). Mediação e colaboração na aprendizagem em Matemática com as TIC. In A. Canavarro, D. Moreira, & M. I. Rocha (Orgs.), *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 76-88). Lisboa: SPCE.
- Merriam, S. B. (1988). *Case study research in education*. S. Francisco, CA: Jossey-Bass.
- Mewborn, D. S. (2003). Teaching, teachers' knowledge and their professional development. In J. Kilpatrick, W.G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A Research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 45-52). Reston: NCTM.

- Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Recuperado em 15 de Outubro de 2008 de <http://sitio.dgidec.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf>.
- Mishra, P., & Koehler, M. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, 108(6), 1017-1054.
- National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM. (Original publicado em inglês em 2000).
- Olson, M. (1997). Collaboration: An epistemological shift. In H. Christiansen, L. Goulet, C. Kreniz & M. Maeers (Eds.). *Recreating relationships: Collaboration and educational reform* (pp. 13-25). New York, NY: State University of New York Press.
- Ruthven, K., & Goodchild, S. (2008). Linking researching with teaching. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 561-588). Mahwah, NJ: Laurence Erlbaum.
- Stake, R. E. (2007). *A arte da investigação com estudos de caso*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian. (Original published in English in 1995).
- Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313-340.
- Suh, J. M. (2010). Tech-Knowledge & diverse learners. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15(8), 440-447. Recuperado em 6 de Setembro de 2010, de [http://www.nctm.org/eresources/view\\_media.asp?article\\_id=9197](http://www.nctm.org/eresources/view_media.asp?article_id=9197).



Yerushalmy, M., & Chazan, D. (2003). Flux in school algebra: Curricular change, graphing technology, and research on student learning and teacher knowledge. In A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & F.K.S. Leung (Eds.), *Second international handbook of mathematics education* (pp. 725-755). Dordrecht: Kluwer.